TD 13 – Chaînes de Markov (un peu de tout)

Exercice 1. *Question de cours*

1. On a vu dans un TD précédent qu'une marche aléatoire non biaisée sur $\mathbb{Z}$ est récurrente. Est-elle récurrente positive ?

Exercice 2. *Diffusion*

We study a simple model for the exchange of gas molecules between two containers. The total number of molecules in the two containers is N, and we study the evolution of the number of molecules in the first container. At every discrete time step t, the exchange is modeled as follows : if the first container has x molecules, then it increases to $x+1$ with probability $\frac{N-x}{N}$ and decreases to $x-1$ with probability $\frac{x}{N}$.

1. Describe this model with a Markov chain (give the state space and transition matrix). For $N = 3$, draw a graphical representation of this Markov chain.
2. Find the stationary distribution of this Markov chain.
3. Suppose at time 0, the first container is empty (i.e., all the N molecules are in the second container). Let $T \geq 1$ be the next time where the first container is empty. Compute $\mathbf{E}[T]$.

Exercice 3. *Fumeur*

Rappel : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dire *arithmetico-géométrique* s'il existe a et b tels que la suite vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \ .$$

Si $a = 1$, la suite est en fait simplement une suite arithmétique. Si $a \neq 1$, on obtient le n-ième terme de la suite par la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - r) + r \qquad \text{où } r = \frac{b}{1-a} \ .$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = (u_0 - r)\frac{a - a^n}{1-a} + nr \ .$$

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour suivant cette bonne résolution (jour 0), il ne fume pas. On suppose que la probabilité qu'il fume le jour $j+1$ s'il n'a pas fumé le jour j est α, et que la probabilité qu'il ne fume pas le jour $j+1$ s'il a fumé le jour j est β, avec α et β non nuls et indépendants de j.

1. Justifier que l'on peut modéliser ce problème par une chaîne de Markov, et en donner sa représentation graphique.
2. Calculer la probabilité p_n qu'il ne fume pas le jour n. Quelle est la limite π de $(p_n, 1-p_n)$ quand $n \to +\infty$? Vérifier que π est une probabilité invariante pour la chaîne, c'est-à-dire que si X_n suit la loi π, alors X_{n+1} aussi.
3. Trouver $s > 0$ et $0 < t < 1$ tels que , pour tout état x on a : $|\mathbf{P}\{X_n = x\} - \pi(x)| \leq st^n$.
4. Quelle est la loi du premier jour où il se remet à fumer ?
5. Quelle est la loi du premier jour (autre que le jour 0) où il ne fume pas ?

6. Calculer l'espérance du nombre de jours N_n où il fume entre le jour 1 et le jour n. Déterminer la limite $\mathbf{E}[N_n]/n$.

Exercice 4. *Triangles monochromatiques*

Une k-coloration d'un graphe est un assignement pour chaque sommet d'une couleur parmi k couleurs au total. Elle est *propre* si deux sommets adjacents ne reçoivent jamais la même couleur. Un graphe est k-colorable s'il existe une k-coloration propre. Soit G un graphe 3-colorable.

1. Prouver qu'il existe une 2-coloration (non propre) telle qu'aucun triangle n'est monochromatique (un triangle est monochromatique si les trois sommets qui le composent reçoivent la meme couleur).

On considère maintenant l'algorithme suivant dont le but est de trouver une telle 2-coloration : on commence avec une 2-coloration arbitraire. Tant qu'il y a un triangle monochromatique, on choisit uniformément un sommet parmi les trois sommets qui le composent, et on change sa couleur. On veut étudier l'espérance du nombre de recolorations avant de s'arrêter.

Comme G est 3-colorable, il existe une coloration propre Rouge, Bleu, Vert (mais que l'on ne connaît pas). On note R (resp. B, V) l'ensemble des sommets colorés rouge (resp. bleu, vert) dans cette 3-coloration. Considérons maintenant une 2-coloration arbitraire c de G (en rouge et bleu, disons). Soit $m(c)$ le nombre de sommets de R qui ne sont pas colorés rouge dans c, plus le nombre de sommets de B qui ne sont pas colorés bleu dans c.

2. Que dire si $m(c) = n$ ou $m(c) = 0$?
3. En s'inspirant de l'exemple du cours sur 2-SAT, modéliser l'évolution de $m(c)$ par une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, n\}$. Quels sont le ou les sommets à atteindre pour terminer ? Que pouvez-vous dire de l'état j par rapport à l'état $n - j$ pour $j \in \{0, \ldots, n\}$?
4. Soit h_j l'espérance du nombre de recolorations à effectuer pour terminer, en partant d'une 2-coloration c pour laquelle $m(c) = j$. Exprimer h_j en fonction de h_{j-1} et h_{j+1} pour $j = 1 \ldots (n-1)$. Determiner h_0 et h_n.
5. Montrer que $h_j = h_{j+1} + f(j)$ pour une certaine fonction f à déterminer, avec $f(0) = -h_1$.
6. Prouver que $h_{n/2} = \mathcal{O}(n^2)$ et conclure. *(On pourra utiliser la relation $h_1 = h_{n-1}$ que l'on obtient par symétrie, pour finir de résoudre la récurrence).*