TD 13 – Chaînes de Markov (un peu de tout) (corrigé)

Exercice 1. *Question de cours*

1. On a vu dans un TD précédent qu'une marche aléatoire non biaisée sur $\mathbb{Z}$ est récurrente. Est-elle récurrente positive ?

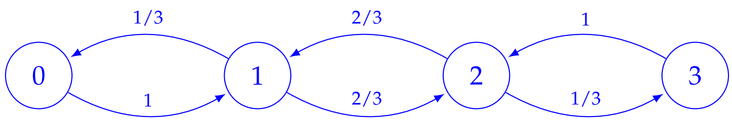
☞ Non, si elle l'était, comme la chaîne est irréductible, alors elle admettrait une distribution stationnaire. Mais on a vu en cours que ce n'était pas possible (regarder par exemple avec les flots, il faudrait que tous les états aient la même probabilité, ce qui est impossible).

Exercice 2. *Diffusion*

We study a simple model for the exchange of gas molecules between two containers. The total number of molecules in the two containers is N, and we study the evolution of the number of molecules in the first container. At every discrete time step t, the exchange is modeled as follows : if the first container has x molecules, then it increases to $x+1$ with probability $\frac{N-x}{N}$ and decreases to $x-1$ with probability $\frac{x}{N}$.

1. Describe this model with a Markov chain (give the state space and transition matrix). For $N=3$, draw a graphical representation of this Markov chain.

☞



For general N, the entries of the transition matrix are given by $P_{i,i+1} = (N-i)/N$, $P_{i,i-1} = i/N$, $P_{i,i} = 0$.

2. Find the stationary distribution of this Markov chain.

☞ We know, using the flow techniques (look at a cut between i and $i+1$) that the stationary distribution π satisfies, for all $0 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned}
\pi_i \cdot \frac{N-i}{N} &= \pi_{i+1} \frac{i+1}{N} \\
\Leftrightarrow \pi_{i+1} &= \frac{N-i}{i+1} \pi_i \\
&= \pi_0 \cdot \prod_{j=0}^{i} \frac{N-j}{j+1} \\
&= \binom{N}{i+1} \pi_0
\end{aligned}$$

Hence, for all $0 \leq i \leq N$, we have $\pi_i = \binom{N}{i+1}\pi_0$. But we also know that $\sum_i \pi_i = 1$, i.e. $\pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i+1} = 1$. We conclude that $\pi_0 = 2^{-N}$.

3. Suppose at time 0, the first container is empty (i.e., all the N molecules are in the second container). Let $T \geq 1$ be the next time where the first container is empty. Compute $\mathbf{E}[T]$.

☞ In one of the lectures, we defined the quantity $h_{i,i}$ to be an average time to return to state i from i. In was also shown that $h_{i,i} = \lim_{n\to\infty} P^n_{j,i} = 1/pi_i$. For $i=0$, $h_0 = 1/pi_0 = 2^n$.

Exercice 3. *Fumeur*

Rappel : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dire *arithmetico-géométrique* s'il existe a et b tels que la suite vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\ .$$

Si $a=1$, la suite est en fait simplement une suite arithmétique. Si $a \neq 1$, on obtient le n-ième terme de la suite par la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - r) + r \qquad \text{où } r = \frac{b}{1-a}\ .$$

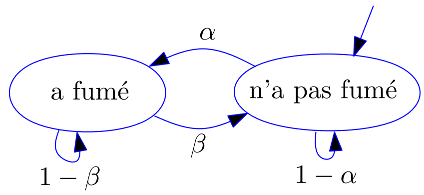
De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = (u_0 - r)\frac{a - a^n}{1-a} + nr\ .$$

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour suivant cette bonne résolution (jour 0), il ne fume pas. On suppose que la probabilité qu'il fume le jour $j+1$ s'il n'a pas fumé le jour j est α, et que la probabilité qu'il ne fume pas le jour $j+1$ s'il a fumé le jour j est β, avec α et β non nuls et indépendants de j.

1. Justifier que l'on peut modéliser ce problème par une chaîne de Markov, et en donner sa représentation graphique.

   ☞ On peut modéliser cela par une chaîne de Markov car la probabilité qu'il fume le lendemain dépend seulement du fait qu'il ait fumé ou pas le jour-même. Voici la chaîne de Markov :



2. Calculer la probabilité p_n qu'il ne fume pas le jour n. Quelle est la limite π de $(p_n, 1-p_n)$ quand $n \to +\infty$? Vérifier que π est une probabilité invariante pour la chaîne, c'est-à-dire que si X_n suit la loi π, alors X_{n+1} aussi.

   ☞ Comment arrive-t-on à ne pas fumer le jour n ? Pour $n = 0$, on a $p_0 = 1$. Ensuite, soit on n'a pas fumé au jour $n-1$, ce qui arrive avec proba p_{n-1}, et on ne fume encore pas, ce qui arrive avec proba $1-\alpha$; soit on a fumé au jour $n-1$, ce qui arrive avec proba $1 - p_{n-1}$, puis on ne fume pas ce qui arrive avec proba β. Donc la suite (p_n) suit la relation de récurrence suivante :

$$p_n = p_{n-1}(1-\alpha) + (1-p_{n-1})\beta = (1-\alpha-\beta)p_{n-1} + \beta$$

   La suite (p_n) est donc arithmetico-géométrique avec $a = 1-\alpha-\beta$ et $b = \beta$. On pose donc $r = \frac{b}{1-a} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ et on applique la formulée donnée dans le rappel :

$$p_n = a^n(p_0 - r) + r = (1-\alpha-\beta)^n(1-r) + r = (1-\alpha-\beta)^n\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ .$$

   Si $1-\alpha-\beta \neq \pm 1$ (i.e. $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ et $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$), alors $p_n \to \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ quand n tend vers l'infini. Si à l'inverse $(\alpha,\beta) = (1,1)$ (le cas $(0,0)$ est impossible par hypothèse), alors la chaine est périodique de période 2, et on ne peut pas converger vers une distribution stationnaire.

   On vérifie que si $\mathbf{P}\{X_n = \text{pas fumé}\} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ alors $\mathbf{P}\{X_n + 1 = \text{pas fumé}\} = (1-\alpha)\mathbf{P}\{X_n = \text{pas fumé}\} + \beta\mathbf{P}\{X_n = \text{a fumé}\} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

3. Trouver $s > 0$ et $0 < t < 1$ tels que , pour tout état x on a : $|\mathbf{P}\{X_n = x\} - \pi(x)| \leq st^n$.

   ☞ Pour x = a fumé, $|\mathbf{P}\{X_n = x\} - \pi(x)| = |p_n - r| = |a^n(1-r) + r - r| = a^n(1-r)$. De plus, pour x = pas fumé, $|\mathbf{P}\{X_n = x\} - \pi(x)| = |(1-p_n) - (1-r)| = |-a^n(1-r) - r + r| = a^n(1-r)$ donc on prend $s = 1-r$ et $t = a$.

4. Quelle est la loi du premier jour où il se remet à fumer ?

   ☞ Soit X le premier jour où il se remet à fumer. On a $X = n$ ssi il reste dans l'état "pas fumé" pendant $n-1$ jours puis prend la transition de probabilité α au n-ième jour. Donc $\mathbf{P}\{X = n\} = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$. Il s'agit donc d'une loi géométrique de paramètre α.

5. Quelle est la loi du premier jour (autre que le jour 0) où il ne fume pas ?

   ☞ Soit X le premier jour autre que le jour 0 où il ne fume pas. On a $X = n$ ssi au jour 1, il passe dans l'état "a fumé", qu'il y reste pendant $n-2$ jours, et enfin il prend la transition vers "pas fumé". Donc

$$\mathbf{P}\{X = n\} = \alpha(1-\beta)^{n-2}\beta$$

   .

6. Calculer l'espérance du nombre de jours N_n où il fume entre le jour 1 et le jour n. Déterminer la limite $\mathbf{E}[N_n]/n$.

☞ Soit W_i la variable aléatoire qui vaut 1 s'il ne fume **pas** au jour i, et 0 sinon. Alors $\mathbf{P}\{W_i = 1\} = p_i$ et $N_n = n - \sum_{i=1}^n W_i$. Donc $\mathbf{E}[N_n] = n - \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[W_i] = n - \sum_{i=1}^n p_i$.
Or, par la formule donnée, $\sum_{i=1}^n p_i = (p_0 - r)\frac{a-a^n}{1-a} + nr$ donc

$$\mathbf{E}[N_n] = n - ((1-r)\frac{a-a^n}{1-a} + nr) = n(1-r) - (1-r)\frac{a-a^n}{1-a}.$$

et donc

$$\frac{\mathbf{E}[N_n]}{n} = (1-r) - \frac{1}{n}(1-r)\frac{a-a^n}{1-a} \longrightarrow_{n\to\infty} 1-r = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Exercice 4. *Triangles monochromatiques*

Une k-coloration d'un graphe est un assignement pour chaque sommet d'une couleur parmi k couleurs au total. Elle est *propre* si deux sommets adjacents ne reçoivent jamais la même couleur. Un graphe est k-colorable s'il existe une k-coloration propre. Soit G un graphe 3-colorable.

1. Prouver qu'il existe une 2-coloration (non propre) telle qu'aucun triangle n'est monochromatique (un triangle est monochromatique si les trois sommets qui le composent reçoivent la meme couleur).

   ☞ Il existe une coloration propre Rouge, Bleu, Vert. On recolorie les sommets verts en rouge. Chaque triangle contenait déjà un sommet rouge et un sommet bleu avant la recoloration, et c'est toujours le cas.

On considère maintenant l'algorithme suivant dont le but est de trouver une telle 2-coloration : on commence avec une 2-coloration arbitraire. Tant qu'il y a un triangle monochromatique, on choisit uniformément un sommet parmi les trois sommets qui le composent, et on change sa couleur. On veut étudier l'espérance du nombre de recolorations avant de s'arrêter.
Comme G est 3-colorable, il existe une coloration propre Rouge, Bleu, Vert (mais que l'on ne connaît pas). On note R (resp. B, V) l'ensemble des sommets colorés rouge (resp. bleu, vert) dans cette 3-coloration. Considérons maintenant une 2-coloration arbitraire c de G (en rouge et bleu, disons). Soit $m(c)$ le nombre de sommets de R qui ne sont pas colorés rouge dans c, plus le nombre de sommets de B qui ne sont pas colorés bleu dans c.

2. Que dire si $m(c) = n$ ou $m(c) = 0$?

   ☞ Dans ces cas, aucun triangle n'est monochromatique et l'on a terminé.

3. En s'inspirant de l'exemple du cours sur 2-SAT, modéliser l'évolution de $m(c)$ par une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, n\}$. Quels sont le ou les sommets à atteindre pour terminer ? Que pouvez-vous dire de l'état j par rapport à l'état $n-j$ pour $j \in \{0, \ldots, n\}$?

   ☞ Supposons $m(c) = j \neq 0, n$ et regardons le triangle monochromatique choisi. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il est entièrement rouge. Avec proba 1/3, on tire le sommet de V et on le recolore : cela laisse $m(c)$ inchangé ; avec proba 1/3, on tire le sommet de B et on le recolore : on passe à $m(c)+1$; et enfin avec proba 1/3, on tire le sommet de R et on le recolore : on passe de $m(c)$ à $m(c)-1$. La chaîne de Markov est donc ainsi : pour $j \neq 0, n$, avec proba 1/3 on passe à $j-1$, avec proab 1/3 on reste sur j et avec proba 1/3 on passe à $j+1$. Pour $j = 0$ ou n, on reste sur l'état courant avec proba 1. Le but est d'atteindre le sommet 0 ou le sommet n. La chaîne est complètement symétrique entre l'état j et l'état $n-j$.

4. Soit h_j l'espérance du nombre de recolorations à effectuer pour terminer, en partant d'une 2-coloration c pour laquelle $m(c) = j$. Exprimer h_j en fonction de h_{j-1} et h_{j+1} pour $j = 1 \ldots (n-1)$. Determiner h_0 et h_n.

   ☞ On a $h_0 = 0$ et $h_n = 0$. De plus, on a :

$$h_j = \frac{1}{3}(1 + h_{j-1} + 1 + h_j + 1 + h_{j+1})$$

autrement dit

$$h_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_{j-1} + h_{j+1})$$

5. Montrer que $h_j = h_{j+1} + f(j)$ pour une certaine fonction f à déterminer, avec $f(0) = -h_1$.

☞ On a $h_0 = h_1 + f(0) = h_1 - h_1 = 0$: ok.
Puis

$$h_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_{j-1} + h_{j+1}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_j + f(j-1) + h_{j+1})$$

donc

$$\frac{1}{2}h_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}f(j-1) + \frac{1}{2}h_{j+1}$$

donc $h_j = h_{j+1} + 3 + f(j-1) = h_{j+1} + f(j)$ avec $f(j) = 3 + f(j-1)$ donc $f(j) = 3j - h_1$.

6. Prouver que $h_{n/2} = \mathcal{O}(n^2)$ et conclure. *(On pourra utiliser la relation $h_1 = h_{n-1}$ que l'on obtient par symétrie, pour finir de résoudre la récurrence).*

☞ On a $h_{n-1} = h_n + f(n-1) = 0 + f(n-1)$. Comme $h_1 = h_{n-1}$ et $f(n-1) = 3(n-1) - h_1$, on obtient : $h_1 = 3(n-1) - h_1$ donc $h_1 = 3(n-1)/2$. Donc $h(j) = h_{j+1} + 3j - 3(n-1)/2$.
Donc

$$h_j = h_n + \sum_{k=j}^{n-1}(3j - \frac{3}{2}(n-1)) = 0 + 3\sum_{k=j}^{n-1} j - \frac{3(n-1)(n-j)}{2} = 3\frac{(n-1+j)(n-j)}{2} - \frac{3(n-1)(n-j)}{2} = 3\frac{(n-j)}{2}(n-1+j-(n-1)) = \frac{3j(n-j)}{2}$$

donc

$$h_{n/2} = \frac{3(n/2)^2}{2} = \mathcal{O}(n^2).$$

Comme $h_{n/2}$ est le "milieu" de la chaine, c'est le pire cas (on peut vérifier que c'est le maximum de h_j) et donc l'espérance du nombre de recolorations est quadratique.