TD 11 – Chaînes de Markov (récurrence/transience)

Exercice 1. *Récurrence et Transience*

Sur l'ensemble $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ on considère la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée pour $0 \leq x \leq n-1$ par

$$P(x,y) = \begin{cases} p \text{ si } y = x+1 \\ 1-p \text{ si } y = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

l'état n étant absorbant (i.e. $P(n,x) = 1$ si $n = x$ et 0 sinon), et avec $0 < p < 1$.

1. Dessiner le graphe associé à cette chaîne de Markov. Quels sont les états récurrents et les états transients de cette chaîne ?

2. Soit $S = \{1, \ldots, 6\}$, compléter la matrice suivante pour qu'elle soit matrice de transition d'une chaîne de Markov

$$\begin{pmatrix} 1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

et déterminer quels sont ses états transitoires et récurrents.

3. Montrer que la chaîne de Markov précédente contient deux ensembles fermés (i.e. aucun état en dehors de l'ensemble n'est accessible depuis un état dans l'ensemble) irréductibles non vides C_1 et C_2. Calculer, pour $i \in \{1, 2\}$, la probabilité

$$\mathbf{P}\left\{X_n \in C_i \text{ à partir d'un certain temps} | X_0 = 6\right\}.$$

Exercice 2. *Chaines de Markov ?*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S.

1. Soit $r \in N$. Est-ce que $(X_{r+n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
2. Est-ce que $(X_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
3. On suppose $S \subset \mathbb{Z}$. Est-ce que $(2X_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ? Et $(\lfloor X_n/10 \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$?
4. Est-ce que $(X_n, X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
5. On suppose les états de S numérotés $S = \{S_1, S_2, \ldots\}$. On définit $S' = \{T_{12}, S_3, S_4, \ldots\}$ (on a remplacé les deux premiers états de S par un nouvel état T_{12}). On définit $Y_n = X_n$ si $X_n \in S \setminus \{S_1, S_2\}$ et $Y_n = T_{12}$ sinon (on a fusionné les deux premiers états de la chaîne). Est-ce une chaîne de Markov ?

En cas de réponse positive, on précisera quelle est la matrice de transition (et on donnera une preuve que c'est bien une chaîne de Markov). En cas de réponses négative, on donnera un contre-exemple.

Exercice 3. *Marche aléatoire sur Z biaisée*

Soit $p \in]0, 1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p \text{ si } j = i+1 \\ 1-p \text{ si } j = i-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Cette chaîne est-elle irréductible ?

2. Dans cette question on suppose $p \neq 1/2$, montrer que tous les états de cette chaîne sont transients. *Indication : on pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli. On rappelle également l'équivalent de Stirling :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

Exercice 4. *Marche aléatoire sur Z non biaisée*

Soit $\{X_k\}$ des variables aléatoires discrétes indépendantes et identiquement distribuées. Chaque X_k prend la valeur 1 avec probabilité $1/2$ et -1 avec probabilité $1/2$. On définit alors une marche aléatoire dans $\mathbb{R}$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On s'intéresse à la probabilité d'un retour à l'origine (en un temps fini).

1. S'il y a eu un retour à l'origine au temps m, que peut-on dire de m ? Montrer qu'un retour à l'origine au temps $2n$ arrive avec une probabilité $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$.

2. On définit de même la probabilité f_{2n} qu'un premier retour à l'origine se fasse au temps $2n$. Montrer que pour $n > 0$ les probabilités $\{f_{2k}\}$ et $\{u_{2k}\}$ vérifient la relation $u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0$ (on pose $u_0 = 1$ et $f_0 = 0$).

3. On définit les fonctions génératrices :
$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} x^m \text{ et } F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m} x^m$$
Déduire de la question précédente une relation simple entre $U(x)$ et $F(x)$.

4. Montrer que $U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. En déduire que $F(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.
Indication : on rappelle que $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.

5. Montrer que $f_{2m} = \dfrac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}}$.
Indication : considérer F'.

6. Définissons w_n la probabilité qu'un retour à l'origine se fasse au plus tard au temps n. Notre but est de savoir si l'on va revenir en un temps fini, c'est-à-dire déterminer $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$. Montrer que $w_* = F(1)$. Conclure.