TD 11 – Chaînes de Markov (récurrence/transience) (corrigé)

Exercice 1. *Récurrence et Transience*

Sur l'ensemble $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ on considère la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée pour $0 \leq x \leq n-1$ par

$$P(x,y) = \begin{cases} p \text{ si } y = x+1 \\ 1-p \text{ si } y = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

l'état n étant absorbant (i.e. $P(n,x) = 1$ si $n = x$ et 0 sinon), et avec $0 < p < 1$.

1. Dessiner le graphe associé à cette chaîne de Markov. Quels sont les états récurrents et les états transients de cette chaîne ?

☞ On a deux classe d'équivalence (deux sous-chaînes irréductibles) dans cette chaîne. La première contient les états $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ et l'autre l'état n. L'état n est irréductible, car $\mathbf{P}\{T_n < \infty | X_0 = n\} = 1$. Les autres états sont soit tous irréductibles soit tous transients (car ils sont dans la même composante fortement connexe du graphe). Étudions l'état $n-1$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_{n-1} < \infty | X_0 = n-1\} &\leq \mathbf{P}\{X_1 = 0 | X_0 = n-1\} \\ &= 1-p \\ &< 1. \end{aligned}$$

Les états 0 à $n-1$ sont donc transients.

2. Soit $S = \{1, \ldots, 6\}$, compléter la matrice suivante pour qu'elle soit matrice de transition d'une chaîne de Markov

$$\begin{pmatrix} 1/2 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

et déterminer quels sont ses états transitoires et récurrents.

☞

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Dessiner le graphe de la chaîne de Markov. On voit qu'il y a deux composantes fortement connexes fermées (avec aucune arrête sortante) : $C_1 = \{1, 2\}$ et $C_2 = \{3, 5\}$. L'ensemble $\{4, 6\}$ est aussi fortement connexe mais n'est pas fermé. Si on regroupe ces composantes connexes et qu'on dessine l'arbre associé, l'ensemble $\{4, 6\}$ est la racine de l'arbre, et les noeuds C_1 et C_2 sont ses fils et sont des feuilles de l'arbre. Comme le graphe est fini, on sait (voir exercice PropUtiles) que les états dans les feuilles sont récurrents et les autres sont transitoires. Montrons le dans ce cas là.

Comme l'état C_1 est fermé, la chaîne de Markov (X_n) d'état initial 1 ou 2 et de matrice de transition M est la même que la chaîne de Markov de même état initial et de matrice de transition $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, sur l'ensemble d'états $\{1, 2\}$. Cette chaîne est irréductible et a un nombre fini d'états, donc ses états sont récurrents. On montre de même que les états de C_2 sont récurrents.

Montrons maintenant que l'état 4 n'est pas récurrent (comme il communique avec 6, cela montrera aussi que 6 est transitoire). Comme 6 est le seul état atteignable en un coup depuis 4 qui peut ensuite permettre de revenir en 4, on a $\mathbf{P}\{T_x < \infty | X_0 = 4\} \leq \mathbf{P}\{X_1 = 6 | X_0 = 4\} < 1$. Donc 4 et 6 sont transitoires.

3. Montrer que la chaîne de Markov précédente contient deux ensembles fermés (i.e. aucun état en dehors de l'ensemble n'est accessible depuis un état dans l'ensemble) irréductibles non vides C_1 et C_2. Calculer, pour $i \in \{1, 2\}$, la probabilité

$$\mathbf{P}\{X_n \in C_i \text{ à partir d'un certain temps} | X_0 = 6\}.$$

☞ On a déjà défini à la question précédents deux ensembles non vides C_1 et C_2 fermés et irréductibles. Calculons la probabilité que $X_n \in C_1$ à partir d'un certain temps, en partant de 6. Comme C_1 est fermé, une suite qui entre dans C_1 n'en ressortira plus. De même, une telle suite ne peux pas rentrer dans C_2 (sinon elle n'en sortirait plus pour aller dans C_1). Donc une telle suite oscille entre 4 et 6 puis fini par rentrer dans C_1. On partitionne ces suites en fonction de l'instant k du dernier passage en 6 (un tel instant existe car on part de 6). Après ce dernier passage en 6, la suite ira soit directement en 2, soit en 4 puis en 1 ou 2. On obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps}|X_0=6\} &= \sum_k \mathbf{P}\{X_k=6\}\cdot(1/5+1/5\cdot 1/4+1/5\cdot 1/4)\\ &= 3/10\cdot\sum_k \mathbf{P}\{X_k=6\}.\end{aligned}$$

De même, en inversant les rôles de C_1 et C_2 on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps}|X_0=6\} &= \sum_k \mathbf{P}\{X_k=6\}\cdot(1/5+1/5\cdot 1/4)\\ &= 5/20\cdot\sum_k \mathbf{P}\{X_k=6\}.\end{aligned}$$

Pour finir le calcul, il faut calculer $\sum_k \mathbf{P}\{X_k=6\}$. On peut éviter un calcul direct en remarquant que $\mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps}|X_0=6\} + \mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps}|X_0=6\} = 1$. En effet, on sait qu'une suite qui rentre dans C_1 ou C_2 n'en ressort jamais. On a donc trois possibilités, la suite rentre dans C_1, ou bien elle rentre dans C_2, ou bien elle reste tout le temps dans $\{4,6\}$. Mais si $X_n \in \{4,6\}$ pour tout n, alors N_6 ou N_4 est infini (nombre de passage en 4 ou 6). Or comme 4 et 6 sont transitoire, on sait qu'un tel événement arrive avec probabilité 0. D'où la remarque.
On peut maintenant calculer $\sum_k \mathbf{P}\{X_k=6\}$. Comme $\sum_k \mathbf{P}\{X_k=6\}(3/10+5/20)=1$, on obtient $\sum_k \mathbf{P}\{X_k=6\}=20/11$ puis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_n \in C_1 \text{ à partir d'un certain temps}|X_0=6\} &= 6/11\\ \mathbf{P}\{X_n \in C_2 \text{ à partir d'un certain temps}|X_0=6\} &= 5/11.\end{aligned}$$

Exercice 2. *Chaines de Markov ?*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S.

1. Soit $r \in N$. Est-ce que $(X_{r+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
2. Est-ce que $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
3. On suppose $S \subset \mathbb{Z}$. Est-ce que $(2X_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ? Et $(\lfloor X_n/10\rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Est-ce que $(X_n, X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
5. On suppose les états de S numérotés $S=\{S_1,S_2,\dots\}$. On définit $S'=\{T_{12},S_3,S_4,\dots\}$ (on a remplacé les deux premiers états de S par un nouvel état T_{12}). On définit $Y_n = X_n$ si $X_n \in S\setminus\{S_1,S_2\}$ et $Y_n=T_{12}$ sinon (on a fusionné les deux premiers états de la chaîne). Est-ce une chaîne de Markov ?

En cas de réponse positive, on précisera quelle est la matrice de transition (et on donnera une preuve que c'est bien une chaîne de Markov). En cas de réponses négative, on donnera un contre-exemple.

☞ Pour montrer qu'une suite de variables Y_n est une chaîne de Markov, il faut montrer qu'elle n'a pas de mémoire (dans les cas positifs ci dessus, il suffit d'écrire les choses et tout marche bien). Plus bas, on donne seulement les matrices de transitions ou les contre-exemples.

1. Oui, même matrice P
2. Oui, matrice P^2
3. Oui pour le premier. $x \to 2x+1$ est une injection. On note S' l'image de S par cette injection. La matrice de transition de $(2X_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours P, une fois qu'on a appliqué la bijection sur les états.
   Non pour le deuxième. Par exemple, on considère une marche sur $\mathbb{Z}$ qui à chaque fois se déplace de 1 sur la droite avec probabilité 1 (i.e. $P(x,x+1)=1$). Alors $\mathbf{P}\{\lfloor 10X_n\rfloor = 2|\lfloor 10X_{n-1}\rfloor = 1 \cap \lfloor 10X_{n-2}\rfloor = 0\} = 0 \neq \mathbf{P}\{\lfloor 10X_n\rfloor = 2|\lfloor 10X_{n-1}\rfloor = 1\}$. L'intuition est que comme $\lfloor 10X_n\rfloor$ augmente de 1 tous les 10 coups, alors les 10 coups précédents peuvent apporter de l'information (et pas juste le précédent).
4. Oui. Si on note Q la matrice de transition on a $Q_{(x_{i_1},x_{i_2}),(x_{j_1},x_{j_2})}=0$ si $x_{i_2}\neq x_{j_1}$ et $Q_{(x_{i_1},x_{i_2}),(x_{j_1},x_{j_2})}=P_{x_{j_1},x_{j_2}}$ sinon. On peut dessiner cette matrice pour $S=\{0,1\}$ par exemple, elle est de la forme
$$\begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & P_{1,0} & P_{1,1}\\ P_{0,0} & P_{0,1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & P_{1,0} & P_{1,1}\end{pmatrix}.$$
5. Non, contre-exemple : la chaîne définie sur $\{1,2,3\}$ par $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ (i.e. un cycle de taille 3). Si on fusionne les états 1 et 2 ce n'est plus une chaîne de Markov. On a $\mathbf{P}\{Y_2=3|Y_1=T_{12} \text{ et } Y_0=T_{12}\}=1\neq 0=\mathbf{P}\{Y_2=3|Y_1=T_{12} \text{ et } Y_0=3\}$.

Exercice 3. *Marche aléatoire sur Z biaisée*

Soit $p\in]0,1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition

$$P(i,j)=\begin{cases} p \text{ si } j=i+1\\ 1-p \text{ si } j=i-1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

1. Cette chaîne est-elle irréductible ?

☞ Oui, le graphe associé est connexe.

2. Dans cette question on suppose $p \neq 1/2$, montrer que tous les états de cette chaîne sont transients. *Indication : on pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli. On rappelle également l'équivalent de Stirling :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

☞ On rappelle le lemme de Borel-Cantelli : si A_n sont des événements tels que $\sum_n \mathbf{P}\{A_n\} < \infty$, alors la probabilité qu'une infinité de A_n se réalisent simultanément est nulle.

Pour montrer que les états sont transients, comme la chaîne est irréductible, il suffit de montrer que l'état 0 est transient. C'est à dire qu'il suffit de montrer que $\Pr(N_0 < \infty | X_0 = 0) = 1$, où $N_0 = \sum_n 1_{X_n = 0}$. Notons A_n l'événement "$X_n = 0$". la variable N_0 est alors le nombre de A_n qui se réalisent simultanément. On va montrer avec Borel-Cantelli que ce nombre est fini presque sûrement.

Pour cela, calculons $\Pr(A_n | X_0 = 0) = \Pr(X_n = 0 | X_0 = 0)$. Si n est impair, alors X_n ne peut pas être égal à 0 (il faut faire un nombre pair de pas pour revenir au départ. Si $n = 2k$, alors $\Pr(X_n = 0 | X_0 = 0) = \binom{2k}{k}(p(1-p))^k$ (on obtient cette probabilité en sommant la probabilité ($(p(1-p)^k$) de tous les $\binom{2k}{k}$ chemins possibles).

L'équivalent de Stirling nous donne $\binom{2k}{k} = O(4^n)$. Comme $p \neq 1/2$, on a $p(1-p) < 1/4$. On conclut que la série des $\binom{2k}{k}(p(1-p))^k = O((4/(p(1-p)))^k)$ converge. Donc, par Borel-Cantelli, on a $\Pr(N_0 < \infty | X_0 = 0) = 1$, ce qui conclut la preuve.

Remarque : on peut alternativement prouver ce résultat avec la loi forte des grands nombres. On peut écrire $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, avec $Y_i = 1$ avec probabilité p et $Y_i = -1$ avec probabilité $1-p$, et les Y_i indépendantes. La loi forte des grands nombre nous dit alors que presque sûrement, X_n/n converge vers $\mathbf{E}[Y_i] = 2p - 1$. Mais alors $X_n \sim (2p-1)n$ (car $2p - 1 \neq 0$ par hypothèses). Donc X_n tend vers $\pm\infty$, et on en déduit qu'il ne passe qu'un nombre fini de fois par 0.

Exercice 4. *Marche aléatoire sur Z non biaisée*

Soit $\{X_k\}$ des variables aléatoires discrétes indépendantes et identiquement distribuées. Chaque X_k prend la valeur 1 avec probabilité $1/2$ et -1 avec probabilité $1/2$. On définit alors une marche aléatoire dans $\mathbb{R}$ par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On s'intéresse à la probabilité d'un retour à l'origine (en un temps fini).

1. S'il y a eu un retour à l'origine au temps m, que peut-on dire de m ? Montrer qu'un retour à l'origine au temps $2n$ arrive avec une probabilité $u_{2n} = \binom{2n}{n}2^{-2n}$.

☞ Déjà, on ne peut revenir à l'origine que si le temps m est pair.

Ensuite, on revient à l'origine au temps $2n$ si on a fait n pas à gauche parmi les $2n$ pas. Cela donne bien $u_{2n} = \binom{2n}{n}2^{-2n}$.

2. On définit de même la probabilité f_{2n} qu'un premier retour à l'origine se fasse au temps $2n$. Montrer que pour $n > 0$ les probabilités $\{f_{2k}\}$ et $\{u_{2k}\}$ vérifient la relation $u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0$ (on pose $u_0 = 1$ et $f_0 = 0$).

☞ On a pour tout $n > 0$:

$$
\begin{aligned}
u_{2n} &= \mathbf{P}\{S_{2n} = 0\} = \mathbf{P}\left\{ \bigcup_{0<k\leq n} S_{2n} = 0 \cap S_{2k} = 0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i < 2k \right\} \\
&= \mathbf{P}\{S_{2n} = 0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i < 2n\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} S_{2n} = 0 \cap S_{2k} = 0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i < 2k \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= u_0 f_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{2(n-k)} f_{2k} \qquad \text{(par indépendance + décalage)} \\
&= u_0 f_{2n} + u_2 f_{2n-2} + \ldots + u_{2n-2} f_2 + f_0 u_{2n}.
\end{aligned}
$$

3. On définit les fonctions génératrices :

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} x^m \text{ et } F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m} x^m$$

Déduire de la question précédente une relation simple entre $U(x)$ et $F(x)$.

☞ On a $U(x) = 1 + U(x) \cdot F(x)$.

Attention : la formule de la question précédente n'est pas vraie pour $n = 0$.

4. Montrer que $U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. En déduire que $F(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.

Indication : on rappelle que $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.

☞ On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= (1-4x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-4x)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2k-1)}{(-2)^k k!}(-2)^k 2^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{k!k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} x^k\end{aligned}$$

On en déduit par changement de variable que

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Ainsi :

$$F(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)} = 1 - \sqrt{1-x}.$$

5. Montrer que $f_{2m} = \frac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}}$.
   Indication : considérer F'.

☞ On a $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{U(x)}{2}$.

Ainsi, $m \cdot f_{2m} = \frac{u_{2(m-1)}}{2} = \binom{2m-2}{m-1} 2^{-2m+1} = \frac{m}{2(2m-1)} \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m-1}}$, d'où la formule annoncée.

6. Définissons w_n la probabilité qu'un retour à l'origine se fasse au plus tard au temps n. Notre but est de savoir si l'on va revenir en un temps fini, c'est-à-dire déterminer $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$. Montrer que $w_* = F(1)$. Conclure.

☞ On a $w_n = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} f_{2k} \to w_* = F(1) = 1$. On retourne presque sûrement à l'origine en un temps fini.