TD 10 – Chaînes de Markov (corrigé)

Exercice 1. *Las Vegas*

Let $\mathcal{A}$ be a Las-Vegas randomized algorithm for a decision problem with an expected running time $T(n)$. Devise a Monte-Carlo randomized algorithm with (deterministic) running time $10T(n)$ and produces an error with probability at most $\frac{1}{10}$.

☞ L'algorithme $\mathcal{B}$ fonctionne de la manière suivante : on laisse tourner $\mathcal{A}$ pendant au plus $10T(n)$ unités de temps. Si $\mathcal{A}$ termine, on renvoie la réponse donnée par $\mathcal{A}$. Sinon, on interrompt $\mathcal{A}$ et on renvoit une réponse arbitraire, disons "Oui".
Alors $\mathcal{B}$ est bien un algorithme de Monte-Carlo car il renvoie toujours une réponse au bout d'un temps donné (le temps d'execution n'est pas aléatoire), mais la réponse peut être fausse dans certains cas. Soit x une entrée de taille n, et on note $t(x)$ la v.a. comptant le temps d'execution de $\mathcal{A}$ sur x lors de l'appel de $\mathcal{B}$: alors :

$$\mathbf{P}\{\mathcal{B} \text{ se trompe sur } x\} \leq \mathbf{P}\{t(x) > 10T(n)\} = \mathbf{P}\{t(x) > 10\mathbf{E}[t(x)]\} \leq \frac{\mathbf{E}[t(x)]}{10\mathbf{E}[t(x)]} = \frac{1}{10}$$

(On a appliqué Markov).

Exercice 2. *Monte-Carlo*

Suppose you are given a randomized polynomial-time algorithm $\mathcal{A}$ for deciding whether $x \in \{0,1\}^*$ is in the language L or not. Suppose it has the following property. If $x \in L$, then $\mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 0\} \leq 1/4$ and if $x \notin L$, then $\mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 1\} \leq 1/3$. Note that the probability here is taken over the randomness used by the algorithm $\mathcal{A}$ and *not* over the input x.

1. Construct a randomized polynomial-time algorithm $\mathcal{B}$ that is allowed to make independent calls to $\mathcal{A}$ such that for all inputs $x \in \{0,1\}^*$, we have $\mathbf{P}\{\mathcal{B}(x) = \mathbf{1}_{x\in L}\} \geq 1 - 2^{-|x|}$. Here $\mathbf{1}_{x\in L} = 1$ if $x \in L$ and 0 otherwise, and $|x|$ denotes the length of the bitstring x.

   ☞ On pose $n = |x|$. On appelle N fois l'algorithme $\mathcal{A}$, et on note $X_1, \ldots, X_N$ les réponses successives. $\mathcal{B}$ renvoie la réponse majoritaire parmi ces N appels (celle qui apparaît au moins $N/2$ fois ; en cas d'égalité, on choisit arbitrairement). Il faut choisir N.
   On veut que la probabilité que l'algorithme $\mathcal{B}$ se trompe soit au plus 2^{-n}. Commençons par le cas où $x \notin L$. On note $p = \mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 1\}$ sachant que $x \notin L$ (avec donc $p \leq 1/3$). On pose $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, alors $\mathbf{E}[X] = pN \leq N/3$. On va appliquer la variante de Chernoff (celle avec $\mu_H \geq \mathbf{E}[X]$) en prenant $\delta = 1/2$ et $\mu_H = N/3$ de telle sorte que $(1+\delta)\mu_H = N/2$.

   $$\mathbf{P}\{\mathcal{B}(x) = 1\} = \mathbf{P}\{X \geq N/2\} = \mathbf{P}\{X \geq (1+\delta)\mu_H\} \leq e^{-\delta^2\mu_H/3} = e^{-N/36}.$$

   Maintenant pour $x \in L$, $\mathbf{E}[X] \geq 3N/4$ donc on applique la variante de Chernoff avec $\mu_L = 3N/4$ et $\delta = 1/3$ de telle sorte que $(1-\delta)\mu_L = N/2$, et donc :

   $$\mathbf{P}\{\mathcal{B} = 0\} = \mathbf{P}\{X \leq N+2\} = \mathbf{P}\{X \leq (1-\delta)\mu_L\} \leq e^{-\delta^2\mu_L/2} = e^{-N/24}.$$

   Donc la probabilité que $\mathcal{B}$ se trompe est bornée par $\max(e^{-N/24}, e^{-N/36}) = e^{-N/36}$. En prenant $N = 36n/\log e$, on obtient que la probabilité que l'algorithme se trompe est au plus 2^{-n}.

Exercice 3. *Meteo*

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, alors le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de cela, une chaîne de Markov que l'on représentera à la fois sur sa forme graphique et sous la forme matrice de transition.

   ☞ voir `http://w3.mathinfolmd.univ-tlse2.fr/membres/chabriac/M1process/exopoly2c.pdf`
   L'ensemble des états est $E = \{B, P, N\}$ pour "Beau", "Pluie", Neige". Le temps pour un jour ne dépend que du temps du jour précédent, indépendamment de tout le reste. On a donc bien un chaîne de Markov, dont la matrice de transition est :

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?
☞ Pour le temps du surlendemain, il faut déterminer P^2. Ici, seulement la première ligne nous intéresse donc on s'économise les deux autres lignes :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

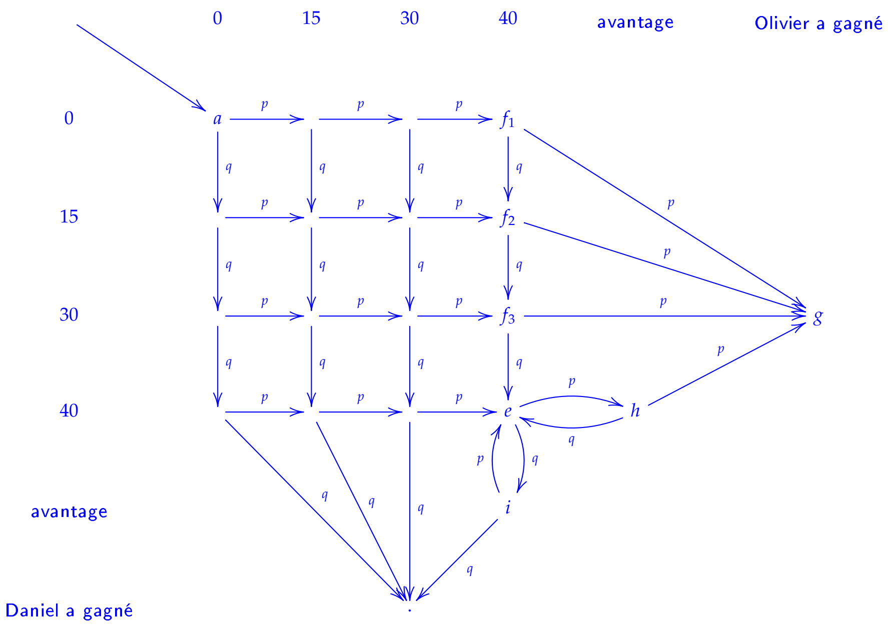
Conclusion : si un jour il fait beau, le temps le plus probable pour le surlendemain est la pluie et ou la neige, avec même probabilité.

3. Peut-on supposer maintenant que l'on a deux deux états, un pour "Beau temps" et un pour "Mauvais Temps" ? Déterminer la nouvelle matrice de transition.
☞ Oui, on peut car les états pluie et neige se comportent de la meme facon. On a donc maintenant :

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *Tennis*

1. On considère un jeu classique du tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivier. C'est à Olivier de servir. Il gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité pour Olivier de gagner le jeu.
☞ On va noter $q = 1 - p$. Voici la chaîne de Markov de ce jeu de tennis :

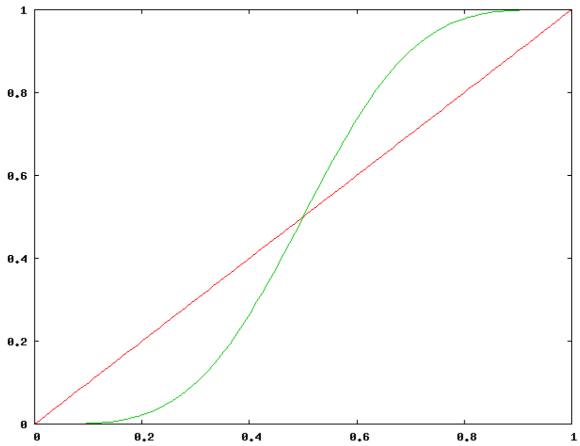


La probabilité d'arriver en g est la somme sur tous les chemins menant à g de la probabilité de chaque chemin. On compte ces chemins selon le dernier état rencontré :
— s'il s'agit de f_1 la probabilité du chemin est p^4 ;
— pour f_2, il y a C_4^1 chemins possibles, chacun de probabilité p^4q ;
— pour f_3, il y a de même C_5^2 chemins, chacun de probabilité p^4q^2 ;
— s'il s'agit de h, on décompose le chemin en trois étapes :
  — la portion $a \ldots e$, il y a C_6^3 chemins, chacun de probabilité p^3q^3,
  — un certain nombre de boucles ehe ou eie, la probabilité de faire n boucles est $2^n(pq)^n$,
  — la portion ehg, de probabilité p^2.

En sommant toutes les possibilités, la probabilité d'arriver en g est

$$p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 + 20p^3q^3 \times \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}(2pq)^n}_{\frac{1}{1-2pq}} \times p^2.$$

2. Lorsque $p \approx 0$, donner l'équivalent asymptotique de cette probabilité. Commenter.
☞ Si $p \approx 0$, alors $q \approx 1$ et c'est p^4 qui domine. L'équivalent est alors $p^4 + 4p^4 + 10p^4 = 15p^4 << p$. Les joueurs forts sont avantagés. Cela ce voit aussi sur un dessin. Voici en vert la probablité qu'Olivier gagne en fonction de p :



On a augmenté le contraste : le systéme de comptage des points avantage le plus fort joueur.

Exercice 5. *Marche aléatoire sur Z biaisée*

Soit $p \in]0,1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états N et de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p \text{ si } j = i+1 \\ 1-p \text{ si } j = i-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Cette chaîne est-elle irréductible ?

☞ Oui, le graphe associé est connexe.

2. Dans cette question on suppose $p \neq 1/2$, montrer que tous les états de cette chaîne sont transients. *Indication : on pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli. On rappelle également l'équivalent de Stirling :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

☞ On rappelle le lemme de Borel-Cantelli : si A_n sont des événements tels que $\sum_n \mathbf{P}\{A_n\} < \infty$, alors la probabilité qu'une infinité de A_n se réalisent simultanément est nulle.

Pour montrer que les états sont transients, comme la chaîne est irréductible, il suffit de montrer que l'état 0 est transient. C'est à dire qu'il suffit de montrer que $\Pr(N_0 < \infty | X_0 = 0) = 1$, où $N_0 = \sum_n 1_{X_n=0}$. Notons A_n l'événement "$X_n = 0$". la variable N_0 est alors le nombre de A_n qui se réalisent simultanément. On va montrer avec Borel-Cantelli que ce nombre est fini presque sûrement.

Pour cela, calculons $\Pr(A_n|X_0 = 0) = \Pr(X_n = 0|X_0 = 0)$. Si n est impair, alors X_n ne peut pas être égal à 0 (il faut faire un nombre pair de pas pour revenir au départ. Si $n = 2k$, alors $\Pr(X_n = 0|X_0 = 0) = \binom{2k}{k}(p(1-p))^k$ (on obtient cette probabilité en sommant la probabilité $((p(1-p)^k)$ de tous les $\binom{2k}{k}$ chemins possibles).

L'équivalent de Stirling nous donne $\binom{2k}{k} = O(4^n)$. Comme $p \neq 1/2$, on a $p(1-p) < 1/4$. On conclut que la série des $\binom{2k}{k}(p(1-p))^k = O((4/(p(1-p)))^k)$ converge. Donc, par Borel-Cantelli, on a $\Pr(N_0 < \infty|X_0 = 0) = 1$, ce qui conclut la preuve.

Remarque : on peut alternativement prouver ce résultat avec la loi forte des grands nombres. On peut écrire $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, avec $Y_i = 1$ avec probabilité p et $Y_i = -1$ avec probabilité $1-p$, et les Y_i indépendantes. La loi forte des grands nombre nous dit alors que presque sûrement, X_n/n converge vers $\mathbf{E}[Y_i] = 2p - 1$. Mais alors $X_n \sim (2p-1)n$ (car $2p - 1 \neq 0$ par hypothèses). Donc X_n tend vers $\pm\infty$, et on en déduit qu'il ne passe qu'un nombre fini de fois par 0.

Exercice 6. *Marche aléatoire sur Z non biaisée*

Soit $\{X_k\}$ des variables aléatoires discrétes indépendantes et identiquement distribuées. Chaque X_k prend la valeur 1 avec probabilité 1/2 et -1 avec probabilité 1/2. On définit alors une marche aléatoire dans $\mathbb{R}$ par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On s'intéresse à la probabilité d'un retour à l'origine (en un temps fini).

1. S'il y a eu un retour à l'origine au temps m, que peut-on dire de m ? Montrer qu'un retour à l'origine au temps $2n$ arrive avec une probabilité $u_{2n} = \binom{2n}{n}2^{-2n}$.

☞ Déjà, on ne peut revenir à l'origine que si le temps m est pair.

Ensuite, on revient à l'origine au temps $2n$ si on a fait n pas à gauche parmi les $2n$ pas. Cela donne bien $u_{2n} = \binom{2n}{n}2^{-2n}$.

2. On définit de même la probabilité f_{2n} qu'un premier retour à l'origine se fasse au temps $2n$. Montrer que pour $n > 0$ les probabilités $\{f_{2k}\}$ et $\{u_{2k}\}$ vérifient la relation $u_{2n} = f_0u_{2n} + f_2u_{2n-2} + \cdots + f_{2n}u_0$ (on pose $u_0 = 1$ et $f_0 = 0$).

☞ On a pour tout $n > 0$:

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \mathbf{P}\{S_{2n}=0\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{0<k\leq n} S_{2n}=0 \cap S_{2k}=0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i<2k\right\} \\
&= \mathbf{P}\{S_{2n}=0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i<2n\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} S_{2n}=0 \cap S_{2k}=0 \cap S_i \neq 0 \text{ pour } i<2k \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= u_0 f_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{2(n-k)} f_{2k} \qquad \text{(par indépendance + décalage)} \\
&= u_0 f_{2n} + u_2 f_{2n-2} + \ldots + u_{2n-2} f_2 + f_0 u_{2n}.
\end{aligned}$$

3. On définit les fonctions génératrices :

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} x^m \text{ et } F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m} x^m$$

Déduire de la question précédente une relation simple entre $U(x)$ et $F(x)$.

☞ On a $U(x) = 1 + U(x) \cdot F(x)$.

Attention : la formule de la question précédente n'est pas vraie pour $n = 0$.

4. Montrer que $U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. En déduire que $F(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.

Indication : on rappelle que $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.

☞ On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= (1-4x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-4x)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{(-2)^k k!}(-2)^k 2^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{k!k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} x^k
\end{aligned}$$

On en déduit par changement de variable que

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Ainsi :

$$F(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)} = 1 - \sqrt{1-x}.$$

5. Montrer que $f_{2m} = \dfrac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}}$.

Indication : considérer F'.

☞ On a $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{U(x)}{2}$.

Ainsi, $m \cdot f_{2m} = \frac{u_{2(m-1)}}{2} = \binom{2m-2}{m-1} 2^{-2m+1} = \frac{m}{2(2m-1)} \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m-1}}$, d'où la formule annoncée.

6. Définissons w_n la probabilité qu'un retour à l'origine se fasse au plus tard au temps n. Notre but est de savoir si l'on va revenir en un temps fini, c'est-à-dire déterminer $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$. Montrer que $w_* = F(1)$. Conclure.

☞ On a $w_n = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} f_{2k} \to w_* = F(1) = 1$. On retourne presque sûrement à l'origine en un temps fini.