TD 09 – Méthode probabiliste

Exercice 1. *Test*

Deux cent étudiants participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiants ont réussi à répondre correctement à la question. Montrer qu'il existe deux étudiants qui avaient tout bon à eux deux (i.e. tels que pour chaque question, au moins un des étudiants a bien répondu).

Exercice 2. *Intervalle*

Soit S une union d'intervalles inclus dans le segment $[0,1]$. On suppose que la longueur totale de S est strictement supérieure à $1/2$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x-y| = 0.1$.

Exercice 3. *Polynome*

Soit $P = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, on ait $|P(z)| = 1$. Montrer que $a = b = 0$. *Indice : on pourra considérer* $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right]$*, où Z est choisi uniformément sur le cercle unité.*

Exercice 4. *Lemme local de Lovasz*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que

1. Pour tout $i \in I$, $\text{card}(A_i) = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $\text{card}\{i \in I : x \in A_i\} \leq \frac{2^k}{8k}$

En utilisant le lemme local de Lovász, montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \quad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A_i \cap F_2 \neq \emptyset.$$

Exercice 5. *Permutation*

On dit qu'une permutation $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$ de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$ vérifie la propriété P si pour un moins un indice $i \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, on a $|x_i - x_{i+1}| = n$. Montrer que pour tout n, il existe strictement plus de permutation avec la propriété P que sans. *Indice : on pourra utiliser la formule de Poincaré (sans partir pour autant dans des calculs trop compliqués).*

Exercice 6. *Tournaments*

A Tournament on a set V of n players is an orientation of the edges of the complete graph K_n (i.e., for $x, y \in V$ either $(x,y) \in E$ or $(y,x) \in E$). Prove that for every positive integer n, there exists a tournament on n vertices with at least $n!2^{-(n-1)}$ Hamiltonian paths (an Hamiltonian path is a path going through each vertex exactly once).