TD 09 – Méthode probabiliste (corrigé)

Exercice 1. *Test*

Deux cent étudiants participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiants ont réussi à répondre correctement à la question. Montrer qu'il existe deux étudiants qui avaient tout bon à eux deux (i.e. tels que pour chaque question, au moins un des étudiants a bien répondu).

☞ C'est le problème 1 de https://pdfs.semanticscholar.org/a5bd/73c6b3ded7a4eb9f851f4aa0721d59ffb07a.pdf. On considère une distribution uniforme que les couples d'étudiants avec remise. On note u et v deux entiers entre 1 et 200 tirés uniformément au hasard (et indépendamment). Et on note $u[i] = 1$, pour $1 \leq i \leq 6$ si l'étudiant u a bien répondu à la question i, et $u[i] = 0$ sinon. On sait que pour tout i, $\mathbf{P}\{u[i] = 0\} \leq \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$, où la probabilité est prise sur le choix de u. Comme u et v sont indépendants, on a $\mathbf{P}\{u[i] = 0 \text{ et } v[i] = 0\} \leq \frac{4}{25}$. D'où, par borne de l'union, $\mathbf{P}\{\exists i \text{ t.q. } u[i] = 0 \text{ et } v[i] = 0\} \leq \frac{24}{25} < 1$. Donc il existe un choix de u et v (i.e. deux étudiants) tels que pour toute question, $u[i] = 1$ ou $v[i] = 1$.

Exercice 2. *Intervalle*

Soit S une union d'intervalles inclus dans le segment $[0, 1]$. On suppose que la longueur totale de S est strictement supérieure à $1/2$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x - y| = 0.1$.

☞

C'est le problème 10 de https://pdfs.semanticscholar.org/a5bd/73c6b3ded7a4eb9f851f4aa0721d59ffb07a.pdf. On tire x uniformément au hasard dans $[0, 1]$ et on définit $y = x + 0.1$ si $\lfloor 10x \rfloor$ est pair, et $y = x - 0.1$ sinon (faire un dessin). Alors, y est uniformément distribué dans $[0, 1]$ (mais pas indépendant de x). Et on a $|x - y| = 0.1$. Par borne de l'union, $\mathbf{P}\{x \notin S \text{ ou } y \notin S\} \leq 2(1 - p)$, où p est la longueur totale de S. Par hypothèse, $1 - p < 1/2$, donc cette probabilité est strictement inférieure à 1. On en déduit qu'il existe x et y dans S à distance 0.1.

Exercice 3. *Polynome*

Soit $P = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, on ait $|P(z)| = 1$. Montrer que $a = b = 0$. *Indice : on pourra considérer* $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right]$, *où Z est choisi uniformément sur le cercle unité.*

☞

C'est le problème 26 de https://pdfs.semanticscholar.org/a5bd/73c6b3ded7a4eb9f851f4aa0721d59ffb07a.pdf. On applique l'indice. On défini Z une variable aléatoire uniforme sur le cercle unité complexe. On a $|P(Z)|^2 = (Z^2 + aZ + b)\overline{(Z^2 + aZ + b)} = 1 + |a| + |b| + 2\mathrm{Re}(\bar{a}Z) + 2\mathrm{Re}(\bar{b}Z^2) + 2\mathrm{Re}(a\bar{b}Z)$ (où on a utilisé le fait que $|Z| = 1$). Mais l'espérance de chacune des parties réelles est nulle (c'est une variable centrée en zéro quand Z parcourt le cercle unité, on peut aussi le voir en écrivant la définition de l'espérance et des parties réelles avec les sinus). D'où $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right] = 1 + |a| + |b|$. Mais comme $|P(z)| = 1$ pour tout z (par hypothèse), on sait aussi que $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right] = 1$. D'où $a = b = 0$.

Exercice 4. *Lemme local de Lovasz*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que

1. Pour tout $i \in I$, $\mathrm{card}(A_i) = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $\mathrm{card}\{i \in I : x \in A_i\} \leq \frac{2^k}{8k}$

En utilisant le lemme local de Lovász, montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \quad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A_i \cap F_2 \neq \emptyset.$$

☞

On partitionne F au hasard en décidant indépendamment et uniformément si chaque $x \in F$ est dans F_1 ou F_2. Pour tout $i \in I$, soit E_i l'événement $\{A_i \cap F_1 = \emptyset\} \cup \{A_i \cap F_1 = \emptyset\}$. Les hypothèses impliquent que chaque événement E_i est indépendant de tous les autres E_j sauf au plus $2^k/8$ d'entre eux ; autrement dit le graphe d'indépendance sous-jacent a degré $\leq 2^k/8 =: d$. Par ailleurs, $\mathbf{P}\{E_i\} \leq 2 \cdot 2^{-k} =: p$. Comme $4dp = 1$, on peut conclure par le lemme local de Lovász.

Exercice 5. *Permutation*

On dit qu'une permutation $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$ de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$ vérifie la propriété P si pour un moins un indice $i \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, on a $|x_i - x_{i+1}| = n$. Montrer que pour tout n, il existe strictement plus de permutation avec la propriété P que sans. *Indice : on pourra utiliser la formule de Poincaré (sans partir pour autant dans des calculs trop compliqués).*

☞ C'est le problème 4 de `https://pdfs.semanticscholar.org/a5bd/73c6b3ded7a4eb9f851f4aa0721d59ffb07a.pdf`. Une solution peut être trouvée sur `https://mks.mff.cuni.cz/kalva/`, qui est copiée-collée ici :
Let A_k be the set of permutations with k and $k+n$ in neighboring positions, and let A be the set of permutations with property P, so that A is the union of the A_k.
Then $|A| = \sum_k |A_k| - \sum_{k<l} |A_k \cap A_l| + \sum_{k<l<m} |A_k \cap A_l \cap A_m| - \cdots$. But this is an alternating sequence of monotonically decreasing terms, hence $|A| \geq \sum_k |A_k| - \sum_{k<l} |A_k \cap A_l|$.
But $|A_k| = 2(2n-1)!$ (two orders for k, $k+n$ and then $(2n-1)!$ ways of arranging the $2n-1$ items, treating k, $k+n$ as a single item). Similarly, $|A_k \cap A_l| = 4(2n-2)!$. So $|A| \geq 2n^2(2n-2)! > (2n)!/2$.

Exercice 6. *Tournaments*

A Tournament on a set V of n players is an orientation of the edges of the complete graph K_n (i.e., for $x, y \in V$ either $(x, y) \in E$ or $(y, x) \in E$). Prove that for every positive integer n, there exists a tournament on n vertices with at least $n!2^{-(n-1)}$ Hamiltonian paths (an Hamiltonian path is a path going through each vertex exactly once).

☞ [MU] Th. 1.2.1 in Alon Spencer Given a complete graph on n vertices, orient its edges independently at random (i.e. with probability $1/2$ we assign $A \to B$.) For a fixed permutation of vertices, the probability that they form a Hamiltonian path is 2^{1-n}. The number of possible permutations on n is $n!$, hence the expected number of Hamiltonian paths is $n!2^{1-n}$. Here again, we can use the fact that if $\mathbf{E}[X] = \mu$, then $\mathbf{P}\{X \geq \mu\} > 0$ and $\mathbf{P}\{X \leq \mu\} > 0$. So there should exist a tournament with a desired number of Hamiltonian paths.