TD 04 – Moments et fonction génératrice

Exercice 1. *Tester la pièce*

1. On considère une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p. Combien de fois doit-on lancer la pièce pour déterminer p à ± 0.1 avec probabilité au moins 0.9 ?

Exercice 2. *Comparer Markov, Chebyshev, Chernoff bounds*

On a un dé équilibré à 6 côtés. On lance le dé n fois et on note X le nombre de fois où le dé tombe sur 6. Soit q la probabilité de l'événement $X \geq n/4$.

1. Comparer les bornes supérieures que l'on obtient en utilisant l'inégalité de Markov, l'inégalité de Chebyshev, et une borne de Chernoff (la plus adaptée).

Exercice 3. *Chernoff Bound Interval*

Let X be an arbitrary random variable with $0 \leq X \leq 1$ and $\mathbf{E}[X] = p$. Consider the random variable $Y \in \{0,1\}$ with $\mathbf{P}\{Y = 1\} = p$. Show that for any $\lambda > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{\lambda X}\right] \leq \mathbf{E}\left[e^{\lambda Y}\right]$. *Hint : you may want to use the convexity of the exponential function.*

Using this fact, show that the Chernoff bound we saw in class still holds if we replace the condition $X_i \in \{0,1\}$ by $X_i \in [0,1]$.

Exercice 4. *Fonction Génératrice*

Etant donnée une variable aléatoire discrète X, à valeurs entières, on appelle *fonction génératrice de X* la fonction $G_X(z) := \mathbb{E}(z^X)$.

1. Dîtes des choses intelligentes sur la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète (ex : donnez la fonction génératrice sous forme de série entière, une formule de l'espérance de X, de sa variance...).

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson : $\mathbb{P}(X = k) = \mathcal{C}(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$, avec $\lambda > 0$.

2. Donner une autre expression pour $G_X(z)$.
3. Montrer que $\mathcal{C}(\lambda) = e^{-\lambda}$.
4. Calculer la fonction génératrice de X. En déduire $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{Var}[X]$.
5. Reprendre la question précédente en supposant que X est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 5. *Inegalité de Jensen*

Soit f une fonction convexe et X une variable aléatoire à valeurs réelles. L'*inégalité de Jensen* assure que

$$\mathbf{E}[f(x)] \geq f(\mathbf{E}[X]) .$$

1. En supposant que f soit $\mathcal{C}^1$, montrer cette inégalité. *Indice : on pourra utiliser le fait que la fonction est supérieure à sa tangente en un point bien choisi.*

Exercice 6. *Probabilités conditionnelles*

Soit Y une variable aléatoire prenant des valeurs entières, positives ou nulles, et dont l'espérance est strictement positive. Le but de cet exercice est de prouver la relation suivante :

$$\frac{\mathbf{E}[Y]^2}{\mathbf{E}[Y^2]} \leq \mathbf{P}\{Y \neq 0\} \leq \mathbf{E}[Y] .$$

1. On voudrait une variable aléatoire X qui corresponde informellement à $(Y|Y \neq 0)$. Comment la définir proprement (on pourra changer d'espace de probabilité) ?
2. Comparer $\mathbf{E}[X]^2$ et $\mathbf{E}\left[X^2\right]$.
3. Conclure.