TD 03 – Moments d'une variable aléatoire

Exercice 1. *Aiguille de Buffon (le retour)*

Aiguille de Buffon [1]

Considérons l'expérience consistant à jeter une ficelle longueur a sur un parquet composé des planches parallèles de même largeur ℓ.

L'objectif de cet exercice est de calculer le nombre moyen de points d'intersections entre la ficelle et les rainures du parquet, en utilisant juste la linéarité de l'espérance (sans trigonométrie).

1. Soit X la variable aléatoire représentant de nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet. Montrer que
$$\mathbf{E}[X] = c \cdot a,$$
pour une certaine constante c que l'on ne demande pas de calculer. *Indice : on pourra décomposer la ficelle en petite tronçons de longueur $\varepsilon < \ell$, que l'on approximera par des segments.*

2. Trouver une forme qui, où qu'elle soit lancée, aura toujours le même nombre d'intersections avec les rainures du plancher. En déduire la constante c.

Exercice 2. *Running Time*

Soit $\mathcal{A}$ un algorithme qui prend en entrée une chaîne de n bits et dont l'espérance du temps d'exécution est $\mathcal{O}(n^2)$ si l'entrée est choisie aléatoirement de manière uniforme.

1. Soit $f(n)$ une fonction tendant vers $+\infty$ avec n. Montrer que la probabilité que le temps d'exécution soit supérieur à $n^2 f(n)$ tend vers zero quand n tend vers l'infini.

2. Que pouvons nous en déduire sur le temps d'exécution dans le pire cas ?

Exercice 3. *Points fixes d'une permutation*

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

1. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un entier n et retourne une permutation aléatoire de loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Vous pouvez utiliser la fonction `RandInt` qui prend en entrée un entier m et retourne un entier aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, m\}$. Évidemment, on préfèrera un algorithme aussi rapide que possible.

2. On note $F(\sigma)$ le nombre de points fixes d'une permutation σ. Calculez
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[F(\sigma_n)]$$
où σ_n suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

3. Calculer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\mathbf{P}\{F(\sigma_n) = 0\}$. *Indice : on pourra introduire les événements $E_i = \{\sigma_n(i) = i\}$ et utiliser la formule de Poincarré.*

Exercice 4. *Debiaiser des bits*

Supposons que vous ayez une machine qui produit des bits aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, mais que vous ne connaissez pas la valeur de $p \in]0, 1[$.

1. Proposez un algorithme qui utilise la machine pour produire un bit de loi uniforme sur $\{0, 1\}$.

2. On souhaite maintenant produire n bits indépendants de loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Proposez un algorithme, et déterminez une valeur de t telle que la probabilité d'utiliser la machine plus de tn fois soient inférieure à $\frac{1}{100}$ pour n assez grand. Évidemment, plus t est petit, mieux c'est.

1. Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788), scientifique et écrivain français.

Exercice 5. *Chebychev d'ordre supérieur*

L'inégalité de Chebyshev utilise la variance d'une variable aléatoire pour borner son écart par rapport à l'espérance. On peut également utiliser des moments d'ordre supérieur.

1. Supposons que l'on ait une variable aléatoire X et un entier pair k pour lequel $\mathbf{E}\left[(X-\mathbf{E}[X])^k\right]$ est finie. Prouver que :

$$\mathbf{P}\left\{|X-\mathbf{E}[X]|>t\sqrt[k]{\mathbf{E}\left[(X-\mathbf{E}[X])^k\right]}\right\}\leq\frac{1}{t^k}\,.$$

2. Qu'est-ce qui nous empêche d'obtenir une inégalité similaire pour le cas où k est impair ? Trouver un contre exemple pour $k=1$.

Exercice 6. *Coquilles dans un TD*

1. Une feuille de TD contient 4 coquilles. À chaque relecture, une coquille non corrigée est corrigée avec probabilité $1/3$. Les relectures sont indépendantes les unes des autres. Combien de relectures faut-il faire au minimum pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune coquille soit supérieure à 0,9 ?
2. À quel autre problème vu en cours vous fait penser la situation précédente ?
3. Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu=10$ et d'écart-type $\sigma=5$. Montrer que pour tout $n\geq 50$, la probabilité que de l'événement $\{10-n<X<10+n\}$ est au moins égale à 0,99.

Exercice 7. *Covariance*

On définit la covariance de 2 variables aléatoires X et Y par :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\Big((X-\mathbf{E}[X])(Y-\mathbf{E}[Y])\Big).$$

1. Montrer que si X et Y sont indépendants, alors $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.
2. Qu'en est il de la réciproque ?
3. Exprimer $\mathbf{Var}[X+Y]$ en fonction de $\mathbf{Var}[X]$, $\mathbf{Var}[Y]$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)$. En déduire une formule plus générale pour $\mathbf{Var}[\sum_{i=1}^n X_i]$.
4. On se donne X et Y de variances finies, et on définit :

$$r(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

   Montrer que $|r(X,Y)|\leq 1$. Que pensez vous du cas où on a l'égalité ?