TD 02 – Variables Aléatoires

Exercice 1. *Independence*

1. Show that the events $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ are mutually independent if and only if

$$\mathbf{P}\left\{\cap_{i=1}^{n} B_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left\{B_i\right\}$$

where for every i, either $B_i = A_i$ or $B_i = A_i^c$. We use the notation A^c for the complement of A in Ω.

For random variables $X_1, \ldots, X_n$, recall that we defined independence by asking that

$$\mathbf{P}\left\{X_1 \leq t_1, \ldots, X_n \leq t_n\right\} = \mathbf{P}\left\{X_1 \leq t_1\right\} \cdots \mathbf{P}\left\{X_n \leq t_n\right\} \quad (1)$$

for all $t_1, \ldots, t_n$ reals.

2. Show that in the case where X_i are all discrete random variables taking values in a discrete [1] countable set C, then this is equivalent to asking that for all $x_1, \ldots, x_n$ in C,

$$\mathbf{P}\left\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left\{X_i = x_i\right\} \ . \quad (2)$$

Exercice 2. *Répétitions dans une suite de bits aléatoires*

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{0,1\}$. Une répétition est un sous-mot de $X_1X_2\cdots X_n$ du type $00\cdots 0$ ou $11\cdots 1$. Ainsi la suite 00011001 contient 4 répétitions de longueur 2.

1. Pour $p > 1$ fixé, quelle est l'espérance du nombre de répétitions de longueur p ? Montrez que pour $p = \lfloor \log_2 n \rfloor$, cette espérance est de l'ordre de 1.
2. Montrez que pour $p \leq 0.99 \log_2 n$, la probabilité d'obtenir au moins une répétition de longueur p tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 3. *StagiairesL3*

Bob veut recruter un stagiaire L3 parmi n candidats, et bien sûr il veut recruter le meilleur. Les candidats se présentent un par un pour l'interview, dans un ordre aléatoire. Quand il interviewe un candidat, Bob lui donne un score (pas d'ex-aequo). La règle du jeu de l'ENS de Lyon est la suivante : après avoir interviewé un candidat, soit on l'embauche, soit on perd toute chance de l'embaucher.

Malin, Bob utilise la stratégie suivante : d'abord, interviewer m candidats, et les rejeter tous ; puis après le m-ème candidat, embaucher le premier candidat interviewé qui est meilleur (plus gros score) que tous ceux déjà interviewés.

1. Montrer que la probabilité que Bob choisisse le meilleur candidat est

$$P(n,m) = \frac{m}{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j-1}$$

2. En déduire que $\lim_n \max_m P(n,m) \geq 1/e$.

Exercice 4. *Inclusion*

Let X and Y be independently and uniformly chosen subsets of $\{1, \ldots, n\}$.

1. 'discrete' means that there is some $\varepsilon > 0$ such that all points of C are at distance at least ε.

1. Compute $\mathbf{P}\{X \subseteq Y\}$.

Exercice 5. *Noir et blanc*

Suppose we start with a bin containing two balls, one white and one black. I repeat the following procedure until the bin contains n balls. At each step, I take a ball uniformly at random from the bin and put the ball back into the bin and add another ball of the same color to the bin.

1. Show that the number of white balls is equally likely to be any number between 1 and $n-1$.

Exercice 6. *Aiguille de Buffon*

Aiguille de Buffon [2]

Considérons l'expérience consistant à jeter une aiguille de longueur a sur un parquet composé des planches parallèles de même largeur l.

Dans un premier temps, on suppose $a < l$ et on va s'intéresser à la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux planches.

1. Proposer une modélisation pour ce problème.
2. Trouver une relation traduisant le fait que l'aiguille est tombée sur deux planches. En déduire la probabilité de cet événement.
3. Dans le cas où $a \geq l$, calculer la probabilité que l'aiguille tombe sur au moins deux planches. Qu'obtient on pour $a = l$? et pour $a \gg l$?
4. Maintenant qu'on a jeté les aiguilles, il ne reste plus qu'à jeter les ficelles. Une fois tombée à terre, la ficelle va former une courbe quelconque de longueur a dans le plan formé par le parquet, et on va s'intéresser cette fois au nombre de points d'intersection entre la ficelle et les rainures du parquet.
   Calculer l'espérance du nombre de points d'intersection en fonction de la longueur de la ficelle.
   Indice : on pourra approximer la ficelle par une succession de petits segments.

Exercice 7. *Le problème des rencontres*

On se donne une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On va alors procéder à une succession de tirages sans remise jusqu'à vider l'urne.

On s'intéresse aux évènements $E_i =$ « la $i$ème boule tirée porte le numéro i».

1. Proposer un espace de probabilité pour modéliser cette expérience.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants : E_i, $E_i \cap E_j$ pour $i < j$, et enfin $\bigcap_{j=1}^{r} E_{i_j}$ pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$.
3. Calculer la probabilité que l'évènement E_i se produise pour au moins un i. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.
4. Combien y a-t-il de façons de placer huit tours sur un échiquier de telle sorte qu'aucune d'entre elles en attaque une autre ? Qu'en est-il si on impose en plus que la diagonale principale soit vide ?

2. Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788), scientifique et écrivain français.