TD 01 – Évènements (corrigé)

Exercice 1. *Monty Hall*

Monty est le présentateur d'un jeu télévisé qui se déroule de la manière suivante. Il y a trois rideaux : derrière l'un, il y a une voiture à gagner, et derrière chacun des deux autres, il y a une chèvre. Bob, le participant, doit choisir un rideau, en espérant choisir celui derrière lequel se cache la voiture. Appelons le rideau que Bob choisi le rideau 1.

Ensuite, Monty ouvre l'un des deux autres rideaux, où se cache une chèvre (s'il y a une chèvre derrière les 2 autres rideaux, Monty en choisit un uniformément au hasard). Supposons que le rideau que Monty ouvre est le rideau 2. Bob doit ensuite décider s'il garde le rideau qu'il a choisi au début, ou bien s'il change avec l'autre rideau fermé restant. Une fois ce choix effectué, Monty ouvre le rideau choisi par Bob et Bob gagne ce qui se cache derrière.

1. Est-ce que Bob a intérêt de changer de rideau à l'étape intermédiaire, ou bien cela ne fait-il aucune différence ? (on suppose bien évidemment que Bob préfère gagner la voiture plutôt qu'une chèvre.... !)

☞ Oui, Bob a intérêt de changer de rideau.

Stratégie 1 : ne pas changer. Si Bob décide de ne pas changer de porte, alors la probabilité qu'il gagne la voiture est la probilité qu'il ait choisi la bonne porte lors de son choix initial, soit 1/3. Plus formellement, appelons 1 la porte que Bob a choisi, $C \in \{1,2,3\}$ l'emplacement de la voiture et $M \in \{1,2,3\}$ la porte que Monty ouvre. Les données que l'on a sont que $M = 2$ et on veut determiner la probabilité que la voiture se trouve en 1 :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{C=1|M=2\} &= \frac{\mathbf{P}\{M=2|C=1\}\,\mathbf{P}\{C=1\}}{\mathbf{P}\{M=2|C=1\}\,\mathbf{P}\{C=1\}+\mathbf{P}\{M=2|C=2\}\,\mathbf{P}\{C=2\}+\mathbf{P}\{M=2|C=3\}\,\mathbf{P}\{C=3\}}\\ &= \frac{1/2\cdot 1/3}{1/2\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1\cdot 1/3} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

Stratégie 2 : changer. Si Bob décide de changer de porte, alors son deuxième rideau choisi cache la voiture si et seulement si son premier rideau choisi ne la cachait pas. Or à l'état initial, Bob a probabilité 2/3 de choisir un rideau derrière lequel se cache une chèvre. Lorsque Bob change

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{C=3|M=2\} &= \frac{\mathbf{P}\{M=2|C=3\}\,\mathbf{P}\{C=3\}}{\mathbf{P}\{M=2|C=1\}\,\mathbf{P}\{C=1\}+\mathbf{P}\{M=2|C=2\}\,\mathbf{P}\{C=2\}+\mathbf{P}\{M=2|C=3\}\,\mathbf{P}\{C=3\}}\\ &= \frac{1\cdot 1/3}{1/2\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1\cdot 1/3} = \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

On voit donc que la stratégie 2 permet de gagner avec probabilité 2/3 alors que la stratégie 1 ne permet de gagner qu'avec probabilité 1/3.

Exercice 2. *Météo*

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques qui se trompent de façon indépendante (la météo nationale n'utilise pas de grenouilles) :

— la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100,
— une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

1. La météo annonce de la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminez le temps le plus probable.

☞ Notons de la façon suivante les différents évènements :
— B : Il fait beau.
— M : La météo a raison.
— G : La grenouille a raison.
— A : La météo prévoit de la pluie tandis que la grenouille prévoit du beau temps.

La formule de Bayes nous permet d'affirmer :

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

Or $P(A|B) = \frac{2}{100}\times\frac{19}{20} = \frac{38}{2000}$ et $P(A|\bar{B}) = \frac{98}{100}\times\frac{1}{20} = \frac{98}{2000}$. Donc

$$P(B|A) = \frac{38\times 7}{38\times 7+98\times 3} = 0,475.$$

Le plus probable est donc qu'il fasse mauvais.

Autre méthode :
Il y a huit cas : il fait beau ou non, la grenouille a raison ou non, la météo a raison ou non. Mais parmi ces cas il n'y a que deux possibilités car on connaît les prédictions de la météo et de la grenouille. On veut donc comparer $P(B \cap \bar{M} \cap G)$ et $P(\bar{B} \cap M \cap \bar{G})$. Or par indépendance $P(B \cap \bar{M} \cap G) = \frac{7}{10}\frac{2}{100}\frac{19}{20} = \frac{133}{10\,000}$ et $P(\bar{B} \cap M \cap \bar{G}) = \frac{3}{10}\frac{98}{100}\frac{1}{20} = \frac{147}{10\,000}$.
Donc il est plus probable qu'il fasse mauvais.

NB : si $\mathbf{P}\{A \mid B\} = \mathbf{P}\{A \mid \bar{B}\}$, alors A et B sont indépendants :

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A \cap B\} + \mathbf{P}\{A \cap \bar{B}\} = \mathbf{P}\{A \mid B\}(\mathbf{P}\{B\} + \mathbf{P}\{\bar{B}\}) = \mathbf{P}\{A \mid B\},$$

d'où $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A \mid B\}\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}$.

Exercice 3. *Compléments des indépendants*

1. Montrer qu'une famille d'événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est indépendante si et seulement si la famille des compléments $(\overline{A_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est indépendante. *Indice : On pourra commencer par montrer que la famille $\{\overline{A_1}, A_2, \ldots, A_n\}$ est indépendante ssi la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est indépendante.*

☞ Comme le complément du complément de A est A, il suffit de montrer une implication pour avoir l'équivalence. De plus, si on montre que les $\{\overline{A_1}, A_2, \ldots, A_n\}$ sont indépendants si les A_i le sont, alors en inversant un par un les événements, on aura obtenu que les $\overline{A_i}$ sont mutuellement indépendants. Il suffit donc de prouver l'indice.

Soit $I \subset \{1, \ldots, n\}$, si I ne contient pas 1, alors comme les A_i sont indépendants, on a immédiatement $\mathbf{P}\{\cap_{i \in I} A_i\} = \prod_{i \in I} \mathbf{P}\{A_i\}$. On s'intéresse maintenant au cas où $I = \{1\} \cup I'$. On veut montrer que $\mathbf{P}\{\overline{A_1} \cap \cap_{i \in I'} A_i\} = \mathbf{P}\{\overline{A_1}\} \prod_{i \in I'} \mathbf{P}\{A_i\}$. Comme Ω est l'union disjointe de A_1 et $\overline{A_1}$, on sait que $\cup_{i \in I'} A_i$ est l'union disjointe de $\overline{A_1} \cup \cup_{i \in I'} A_i$ et $A_1 \cup \cup_{i \in I'} A_i$. On a donc

$$\mathbf{P}\{\cup_{i \in I'} A_i\} = \mathbf{P}\{\overline{A_1} \cup \cup_{i \in I'} A_i\} + \mathbf{P}\{A_1 \cup \cup_{i \in I'} A_i\}.$$

Comme les A_i sont indépendants, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\overline{A_1} \cup \cup_{i \in I'} A_i\} &= \prod_{i \in I'} \mathbf{P}\{A_i\} - \mathbf{P}\{A_1\} \prod_{i \in I'} \mathbf{P}\{A_i\} \\ &= (1 - \mathbf{P}\{A_1\}) \prod_{i \in I'} \mathbf{P}\{A_i\} \\ &= \mathbf{P}\{\overline{A_1}\} \prod_{i \in I'} \mathbf{P}\{A_i\}.\end{aligned}$$

C'est bien ce qu'on voulait, on en conclut que les événements $\{\overline{A_1}, A_2, \ldots, A_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 4. *Géopolitique des indépendants*

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent indépendamment l'héritier de leur duché et espèrent faire une alliance en mariant les deux enfants attendus, mais chaque duc préférerait un garçon.
On va considérer les trois évènements suivants :

A	l'héritier d'Aquitaine est un garçon,
B	l'héritier de Bourgogne est un garçon,
C	les deux sont de même sexe.

1. Montrez que ces trois évènements suivants sont indépendants deux à deux, mais pas mutuellement indépendants.

☞ Notons A l'évènement « l'héritier d'Aquitaine est un garçon », B l'évènement « l'héritier de Bourgogne est un garçon » et C l'évènement « les deux héritiers sont de même sexe ».

L'évènement $A \cap B \cap C$ est égal à l'évènement $A \cap B$. A et B étant supposés indépendants, $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}$. Donc $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\} = 1/4$. Or $\mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{C\} = 1/8$. Les trois évènements ne sont donc pas mutuellement indépendants.

Indépendance deux à deux : c'est vrai pour A et B par hypothèse. Montrons le par exemple pour A et C, le cas B et C est symétrique. La seule possibilité pour avoir A et C est que les deux soient des garçons. On a donc $\mathbf{P}\{A \cap C\} = 1/4$, ce qui est égal à $\mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{C\}$.

2. Jusqu'ici, nous avons supposé que la probabilité d'avoir un garçon et celle d'avoir une fille étaient égales à $1/2$. En notant p la probabilité d'avoir un garçon (celle d'avoir une fille est alors $1 - p$), trouvez les valeurs de p pour lesquelles les évènements A et C sont indépendants.

☞ Si la probabilité d'avoir un garçon est p tandis que celle d'avoir une fille est $1 - p$, on obtient : $\mathbf{P}\{A \cap C\} = p^2$ et $\mathbf{P}\{A\} \times \mathbf{P}\{C\} = p \times (p^2 + (1-p)^2)$. Les deux ne sont égaux que si $2p^3 - 3p^2 + p = 0$, i.e. soit il n'y a que des filles ($p = 0$), soit que des garçons ($p = 1$), soit $p = \frac{1}{2}$.

3. De façon plus générale, proposer un exemple de n événements $A_1, \ldots, A_n$ tels que pour tout $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, on ait $\mathbf{P}\{\cap_{i\in I} A_i\} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}\{A_i\}$ mais qui ne soient pas mutuellement indépendants (i.e. $\mathbf{P}\{\cap_{i=1}^n A_i\} \neq \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_i\}$).

☞

On peut prendre $n-1$ duchesses indépendantes, numérotées de 1 à $n-1$. Chaque duchesse a un enfant qui est une fille ou un garçon avec probabilité $1/2$. Et on considère les événements

A_i la duchesse i a une fille ($1 \leq i \leq n-1$),

A_n il y a un nombre pair de filles au total.

Les événements A_i ont une probabilité $1/2$ par hypothèse. De plus, si on regroupe les événements fondamentaux par pair en échangeant juste le sexe de l'enfant de la duchesse 1 (par exemple on associe l'événement "la duchesse 1 a une fille, la duchesse 2 a une fille et la duchesse 3 a un garçon" à "la duchesse 1 a un garçon, la duchesse 2 a une fille et la duchesse 3 a un garçon"), on voit qu'il y a autant d'événements fondamentaux avec un nombre pair et un nombre impair de filles. Comme ces événements sont équiprobables, on obtient $\mathbf{P}\{A_n\} = 1/2$.

Par hypothèse, les événements $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont mutuellement indépendants. Montrons que les événements $A_1, \ldots, A_n$ ne sont pas mutuellement indépendants. Supposons que $n-1$ est pair, alors $\cap_{i=1}^n A_i = \cap_{i=1}^{n-1} A_i$ (si toutes les duchesses ont des filles, il y en a un nombre pair). Donc $\mathbf{P}\{\cap_{i=1}^n A_i\} = \mathbf{P}\{\cap_{i=1}^{n-1} A_i\} = (1/2)^{n-1}$ car les $(A_i)_{i\leq n-1}$ sont indépendants. Mais $\prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_i\} = (1/2)^n$, donc les événements A_i ne sont pas mutuellement indépendants. Si $n-1$ est impair, on a $\cap_{i=1}^n A_i = \emptyset$, donc $\mathbf{P}\{\cap_{i=1}^n A_i\} = 0 \neq \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_i\}$ et les événements ne sont pas non plus indépendants.

Montrons maintenant que pour tout $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbf{P}\{\cup_{i\in I} A_i\} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}\{A_i\}$. On a déjà dit que c'était vrai si $n \notin I$, car les événements $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ sont indépendants. Supposons donc $n \in I$, on montre le résultat par récurrence sur le nombre d'éléments n'appartenant pas à I.

Initialisation : $I = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ pour un certain $j \neq n$. Alors, on a $\cap_{i\in I} A_i = \cap_{i\neq j,n} A_i \cap A_j$ si $n-1$ est pair et $\cap_{i\in I} A_i = \cap_{i\neq j,n} A_i \cap \overline{A_j}$ si $n-1$ est impair. On en déduit que $\mathbf{P}\{\cap_{i\in I} A_i\} = (1/2)^{n-1} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}\{A_i\}$ (pour le premier cas, on utilise l'indépendance des A_i quand $i \leq n-1$, et pour le second cas, avec $\overline{A_j}$, on peut utiliser l'exercice "indépendance des compléments", ou simplement dire que $\overline{A_j}$ est indépendant des autres A_i).

Récurrence : $I = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$ pour un certain $k \geq 2$. On a alors que $\cap_{i\in I} A_i$ est l'union disjointe de $(\cap_{i\in I} A_i) \cap A_{j_1}$ et $(\cap_{i\in I} A_i) \cap \overline{A_{j_1}}$. Par hypothèse de récurrence, $\mathbf{P}\{\cap_{i\in I} A_i\} = \mathbf{P}\left\{(\cap_{i\in I} A_i) \cap A_{j_1}\right\} + \mathbf{P}\left\{(\cap_{i\in I} A_i) \cap \overline{A_{j_1}}\right\} = (1/2)^{n-(k-1)} + (1/2)^{n-(k-1)} = (1/2)^{n-k} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}\{A_i\}$ (on utilise encore l'indépendance des compléments).

On conclut que $\mathbf{P}\{\cup_{i\in I} A_i\} = \prod_{i\in I} \mathbf{P}\{A_i\}$ pour tout $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$.

4. Quel lien y a-t-il entre "être indépendants 2 à 2" et "être indépendants mutuellement" ?

☞ Être indépendant mutuellement implique être indépendant 2 à 2, mais pas l'inverse (la question précédente donne un contre exemple). C'est l'inverse de "premiers entre eux 2 à 2" et "premiers entre eux dans leur ensemble".

Exercice 5. *Borne inf sur l'univers*

Soit $(\Omega, F, \mathbf{P}\{\})$ un espace de probabilités. On suppose qu'il existe n événements $A_1, \ldots, A_n$ mutuellement indépendants tels que $\mathbf{P}\{A_i\} \notin \{0, 1\}$ pour tout i.

1. Montrer que $\mathrm{Card}(\Omega) \geq 2^n$. *Indice : On pourra considérer les événements $A_1^{b_1} \cap A_2^{b_2} \cap \cdots \cap A_n^{b_n}$ où $A_i^1 = A_i$ et $A_i^0 = \overline{A_i}$.*

☞ On a

$$\Omega = \sqcup_{(b_1,\ldots,b_n)\in\{0,1\}^n} A_1^{b_1} \cap A_2^{b_2} \cap \cdots \cap A_n^{b_n},$$

où $\sqcup$ désigne une union disjointe. En effet, chaque élément de Ω est soit dans A_1, soit dans $\overline{A_1}$ et soit dans A_2, soit dans $\overline{A_2}$, etc. L'univers Ω est donc une union de 2^n ensembles disjoints. Si on montre que tous ces ensembles sont non vides, alors on aura bien que $\mathrm{Card}(\Omega) \geq 2^n$. Pour montrer que ces ensembles sont non vides, il suffit de montrer que leur probabilité est non nulle. Mais $\mathbf{P}\left\{\cap_{i=1}^n A_i^{b_i}\right\} = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}\left\{A_i^{b_i}\right\}$ car les A_i sont indépendants (pour gérer les complémentaires, utiliser l'exercice "complémentaire des indépendants"). Et par hypothèse, $\mathbf{P}\left\{A_i^{b_i}\right\} \neq 0$ car $\mathbf{P}\{A_i\} \notin \{1, 0\}$. Donc le produit est non nul, et on obtient le résultat souhaité.

Exercice 6. *Formule de Poincaré*

On se donne une suite d'évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1. Démontrez la formule suivante, due à Poincaré :

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right\} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\}.$$

☞ Démonstration par récurrence sur $n \geq 2$:

Pour $n = 2$, on retrouve $\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\}$. ok.

Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left\{\bigcup_{1\leq i\leq n+1} A_i\right\} &= \mathbf{P}\left\{A_{n+1} \cup \bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right\} \\
&= \mathbf{P}\{A_{n+1}\} + \mathbf{P}\left\{\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right\} - \mathbf{P}\left\{A_{n+1} \cap \bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right\} \text{ (cas } n=2\text{)} \\
&= \mathbf{P}\{A_{n+1}\} + \mathbf{P}\left\{\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i\right\} - \mathbf{P}\left\{\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i \cap A_{n+1}\right\} \\
&= \mathbf{P}\{A_{n+1}\} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j} \cap A_{n+1}\right\} \text{ (HR } \times 2\text{)} \\
&= \mathbf{P}\{A_{n+1}\} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k<n+1} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k=n+1} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\} \\
&= \mathbf{P}\{A_{n+1}\} + \sum_{i_1=1}^{n} \mathbf{P}\{A_{i_1}\} + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{1\leq j\leq k} A_{i_j}\right\}
\end{aligned}$$

Exercice 7. *Jouons au poker !*

Comptez les probabilités des combinaisons de cartes au poker (première disposition sans joker).

Le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, formé de 4 couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) contenant chacune 13 figures (2, 3,. . ., 10, valet, dame, roi, as). L'as est la carte la plus forte mais il peut parfois être considéré comme la plus faible (Quinte et quinte flush).

Les combinaisons que l'on peut faire au poker sont :

— La paire : 2 cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes une double paire, un full ou un carré.
— La double paire : 2 séries différentes de deux cartes de même valeur qui ne forment pas avec les autres cartes un full.
— Le brelan : trois cartes de la même valeur mais qui ne forment pas avec les autres cartes un carré ou un full.
— La quinte ou suite : 5 cartes consécutives de différentes couleurs.
— La couleur ou flush : 5 cartes de la même couleur.
— Le full : Trois cartes de la même valeur d'une part et deux cartes de même valeur d'autre part.
— Le carré : 4 cartes de la même valeur.
— La quinte flush : 5 cartes consécutives d'une même couleur.